# محاضرة 7 : Histogram

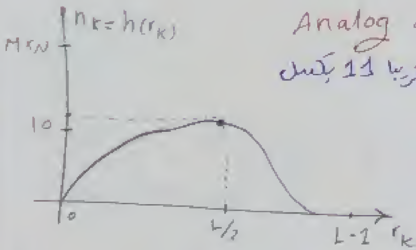
# المحتوى : ① تعريف بالـ Histogram
② Histogram equalization

---

# تعريف بالـ Histogram

* لو متذكر في محاضرة 5 كاتكلمنا عن الـ probabilistic models ، جه وقت استخدامها دلوقت
* الـ Histogram هو وصف لعدد الـ pixels اللي بتحمل قيم ، و بيعرفك توزيع الـ intensities عامل ازاي
* بستفيد من الـ Histogram في معرفة الـ Dynamic Range عالي ولا لا ، الصورة غامقة ولا فاتحة ، الـ contrast أخباره ايه ، وهكذا أعمل بعد كده

بيرسم على المحور الأفقي الـ intensities ، وعلى المحور الرأسي عدد الـ pixels لكل intensity ، هنفرض مثال لصورة Analog




* معنى الرسم إنه عند مثلا القيمة L/2 هلاقي تقريبا 11 بكسل ليهم القيمة دي
* الـ Histogram للصور الـ Digital موجود في سلايد [7.2] وصفحة 30, 29 في الورق

* هنقول إنه قيمة البكسل $r_k$ حيث k بتاخد قيم من $0 \rightarrow L-1$ (255 — 0 في حالتنا)
و إنه عدد البكسلز اللي قيمتها $r_k$ اسمها $n_k$ أو $h(r_k)$

$$h(r_k) = n_k$$

* هنتعامل بالـ probabilistic model فهجيب الـ $P(r_k)$ [نفس اللي اتشرحت في آخر محاضرة 5] اللي بتعبر عن احتمالية كل قيمة للـ intensity

* $$P(r_k) = \frac{h(r_k)}{M \times N} = \frac{n_k}{M \times N}$$

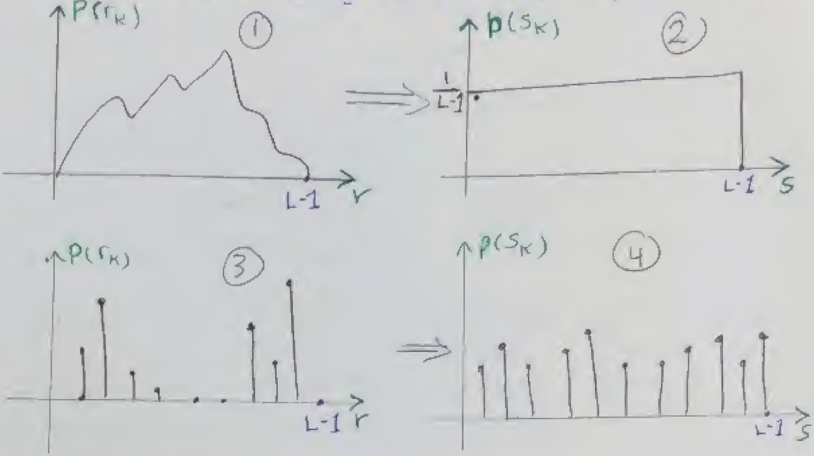
* $$\sum_{k=0}^{L-1} P(r_k) = 1$$ مجموع الاحتمالات

شكل الـ Histogram للصور الغامقة والفاتحة وغيرها موجودة في الـ ايد 7.2
و صفحة 30 في ملف السنة اللي فاتت ، اعرفها كويس

---

# Histogram Equalization

الهدف من الـ Histogram Equalization إني عايز أخلي توزيع الـ intensity يكون Uniform (بحول من (1) لـ (2) في الـ Analog ومن (3) إلى (4) في الـ Digital)




* لاحظ إني برمز للـ intensity بالـ $s$ بعد الـ equalization حيث $s$ هي دالة $T$ في الـ $r$

$$s = T(r)$$

حيث $T$ هي العملية اللي بعملها عشان أطبق الـ Histogram equalization

* لاحظ إني عملت المحور الرأسي بالـ Probability (قولنا هنشتغل بالـ Probability أو بمعنى آخر الـ Normalized Histogram)

* لاحظ إنه الـ Histogram equalization في (4) تقريبا Uniform لكن مش بالظبط ، وده الطبيعي في الـ Digital images لسببين

① علشان الـ Sampling and quantization هم approximation (وقت التقاط الصورة)

② بعمل Rounding للقيم بتاعت الـ Histogram equalization

هنشوف مثال على الكلام ده في مسألة

* راجع سلايد 7.3

* لازم ال T تكون monotonically increasing (زي شرط ال convex في ال fuzzy
بس مش غير مزداد (decreasing

* لازم قيمة التحويل T(r) اللي هي S تبقى بين $0 \leq S = T(r) \leq L-1$

* لو عايز أعمل reverse mapping يعني عايز أرجع لل r من ال S

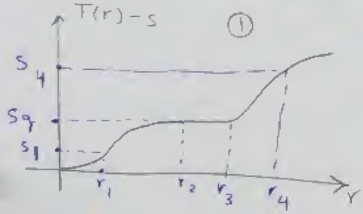
$$r = T^{-1}(s)$$

لازم ال T تكون strictly monotonically increasing

- Monotonically increasing means if $(r_2 > r_1)$ then $T(r_2) \geq T(r_1)$
- Strictly Mono.. increasing means if $(r_2 > r_1)$ then $T(r_2) > T(r_1)$

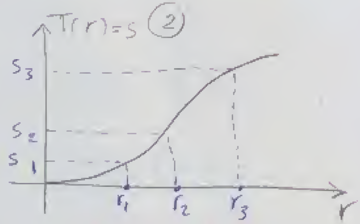
① montonically increasing
② strictly monotonically increasing

* الفرق متوضح في سلايد 6.4




$r_4 > r_3 > r_2 > r_1$

$T(r_4) > [T(r_3) = T(r_2)] > T(r_1)$




$r_3 > r_2 > r_1$

$T(r_3) > T(r_2) > T(r_1)$

في ① معرفش أرجع من $S_q$ ل r عشان عكس ليها أكتر من قيمة زي $r_3, r_4$
لكن في ② أقدر أرجع من أي S لأي r مناظرة ليها.

---

* عايزين نعرف شكل ال T Transformation عامل إزاي (الإثبات مطلوب) ومنه
نطلع معادلة لحساب ال probability P(s)
هنا خدها مرة في ال Analog ومرة في ال Digital

* هنحتاج تحفظ شوية معادلات بسيطة عشان مش هعرف أشرحلك جت منين ؟ هي كده وخلاص .

* هنبص على ال r وال S على انهم random variables في الفترة [0 , L-1]

* فيه حاجة اسمها ال probability density function (سرال Stochastic) اختصارها PDF ، هنرمز لل PDF بـ $p_r(r)$ , $p_s(s)$

* فيه نظرية بتقول إنه لو ال T(r) و $p_r(r)$ معروفين و Continuous وقابلين للتفاضل يبقى $p_s(s)$ هتبقى

$$p_s(s) = p_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right| \quad \#$$

* ال T(r) هتبقى دالة بالشكل التالي (احفظها كده وخلاص)

$$s = T(r) = (L-1) \int_0^r p_r(w)\,dw \quad (*)$$

* لاحظ إنه التكامل بيجمع probability ، طالما بتجمع probability يبقى دايما S بتزيد

* مفيش حاجة اسمها probability سالبة ، يعني مش هيحصل كده بردو وال S عمرها ما تقل . كل ما زادت لعمة أكبر لل r

* أعلى قيمة للتكامل هتبقى 1 طالما بتجمع ال PDF اللي هي $p_r(r)$

* ال w في التكامل دي dummy variable ، بستخدمه رياضيا للتكامل وبعوض في الآخر بـ r فملهوش أي دلالة .

* هتشوف رسمة ال $S_k$ مع ال $r_k$ في سلايد 7.10 ( شبه السلم )

* هنحسب ال S بافتراض إنه $p_r(r)$ معرفة كالتالي

$$p_r(r) = \begin{cases} \frac{2r}{(L-1)} & 0 \leq r \leq (L-1) \\ 0 & \text{othewise} \end{cases}$$

هنعوض في معادلة (*)

$$S = T(r) = (L-1) \int_0^r p_r(w)\,dw$$

$$= (L-1) \int_0^r \frac{2w}{(L-1)}\,dw = \boxed{\frac{r^2}{L-1}}$$

نقدر بقى نحسب $P_s(s)$ بالتعويض في المعادلة (#) من الصفحة اللي فاتت

$$P_s(s) = P_r(r) \left| \frac{dr}{ds} \right|$$

عكس اجيب

$$= \frac{2r}{(L-1)^2} \left| \left[\frac{ds}{dr}\right]^{-1} \right|$$

أسهل $\frac{ds}{dr}$ وبجيب inverse

* لاحظ إنه قيمة $P_s$ constant ملهاش دعوة بشكل الـ $P_r$ خالص

$$= \frac{2r}{(L-1)^2} \left| \frac{d}{dr} (T(r)) \right|^{-1}$$

عوضت عن $ds$ بـ $d(T(r))$

$$= \frac{2r}{(L-1)^2} \left| \frac{d}{dr} \frac{r^2}{(L-1)} \right|^{-1}$$

قيم $P_r(r)$ و $S$ من الصفحة اللي فاتت بالتعويض مباشر

$$= \frac{\cancel{2r}}{(L-1)^{\cancel{2}}} \left| \frac{(L-1)}{\cancel{2r}} \right| = \frac{1}{L-1}$$

* لاحظ إنه النتيجة بتاعت $P_s(s)$ هي $\frac{1}{L-1}$ للـ Analog image وده نفس الكلام اللي بتقوله الرحمة في صفحة (2) رحمة (2)

* $P_s(s)$ هي دي الـ probability أو توزيع الـ intensity اللي عايز أوصله ، ومعناها إني لو وصلتها يبقى قيم كل الـ intensity ليها نفس العدد من الـ Pixels وهو ده الـ Histogram equalization

* في حالة الـ digita Image مش هقدر أوصل بالظبط لـ $P_s(s)$ تبقى $\frac{1}{L-1}$ بسبب السببين في آخر صفحة (2)

① الـ approximation للنقط بالصورة

② الـ rounding لما بعمل الـ Transformation

* في الـ Digital هنعيد نفس المعادلات بس بـ ($\Sigma$) بدل التكامل وبشكل الـ Discrete PDF

في الـ Digital هيبقى عندي

$$P_r(r_k) = \frac{n_k}{MN}$$

* خلي بالك إن إحنا $n_k$ معطاها ليك وكذلك الـ $r_k$

$$S_k = T(r_k) = (L-1)\sum_{j=0}^{k} P_r(r_j)$$

* راجع الـ slides بعد الكلام ده هتلاقيها مفهومة

* راجع سلايد 7.9

$$S_k = (L-1)\sum_{j=0}^{k} \frac{n_j}{MN} = \frac{(L-1)}{MN}\sum_{j=0}^{k} n_j$$

* حيث $n_j$ هو عدد البكسلز لكل intensity $r_j$

---

* فاضل مثال على الكلام ده، وابقى راجع التطبيق في سلايد [7.11]

معطيات المسألة: هديلك الجدول على الشمال فيه $r_k$ , $n_k$ (هنحسب احنا الـ ($P_r(r)$) وإن الصورة 3 بت (3-bit) (يعني $L=2^3=8$) وأبعاد الصورة 64x64 وهديلك الـ input histogram على الشمال فوق

المطلوب: تحسب الـ S وترسم العلاقة بين $r_k$ و $s_k$ وترسم الـ output histogram

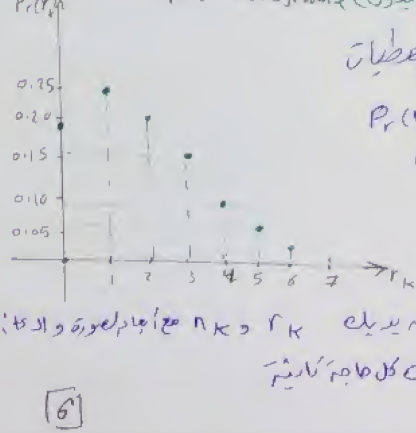
* الحل هيطول عشان بالتفصيل بجمل *

| $r_k$ | $n_k$ | $P_r(r_k) = n_k/MN$ |
|---|---|---|
| $r_0 = 0$ | 790 | 0.19 |
| $r_1 = 1$ | 1023 | 0.25 |
| $r_2 = 2$ | 850 | 0.21 |
| $r_3 = 3$ | 656 | 0.16 |
| $r_4 = 4$ | 329 | 0.08 |
| $r_5 = 5$ | 245 | 0.06 |
| $r_6 = 6$ | 122 | 0.03 |
| $r_7 = 7$ | 81 | 0.02 |

input histogram (من الجدول)

* ارسم المعطيات

* حسبنا الـ $P_r(r_k)$ في الجدول




عكس في الامتحان يديلك $r_k$ و $n_k$ مع أبعاد الصورة والـ bits ويطلب منك كل حاجة تانية

الحل: $S_k = T(r_k) = \frac{(L-1)}{MN}\sum_{j=0}^{k} n_j = (L-1)\sum_{j=0}^{k} P_j(r_j)$

① ②

استعمل ① أو ② في الحساب بس دا رقم اسرع ② أسرع لإنك حسبت

الـ $P_r(r_k)$ في الجدول

$$S_0 = (L-1)\sum_{j=0}^{0} P_j(r_j)$$

$$= (8-1)\ P_0(r_0) = 7 * 0.19 = \boxed{1.33}$$

* هنعملها rounding بس مش دلوقت

* لازم قيم S تكون integer عشان بتعبر عن intensity

$$S_1 = (L-1)\sum_{j=0}^{1} P_j(r_j)$$

$$= 7\left[P_0(r_0) + P_1(r_1)\right]$$

$$= \underbrace{7P_0(r_0)}_{S_0} + 7P_1(r_1) = \boxed{S_0 + 7P_1(r_1)}$$

عشان أقلل الحساب

$$= 1.33 + 1.75 = \boxed{3.08}$$

$$S_2 = 7\sum_{j=0}^{2} P_j(r_j) = 7\left[P_0(r_0) + P_1(r_1) + P_2(r_2)\right]$$

$$= \underbrace{\underbrace{7P_0(r_0)}_{S_0} + 7P_1(r_1)}_{S_1} + 7P_2(r_2)$$

من الجدول = 0.21

$$= \boxed{S_1 + 7P_2(r_2)} = 3.08 + 1.47 = \boxed{4.55}$$

* لاحظ إنك الـ S بتزيد كل مرة لما استخدم الصيغة المختصرة أسهل في الحساب

* بنفس طريقة الحساب هنجيب الباقي

$$S_3 = S_2 + 7P_3(r_3) = 4.55 + 7 * 0.16 = 5.67$$

$$S_4 = S_3 + 7P_4(r_4) = 5.67 + 0.56 = 6.23$$

$$S_5 = S_4 + 7P_5(r_5) = 6.23 + 0.42 = 6.65$$

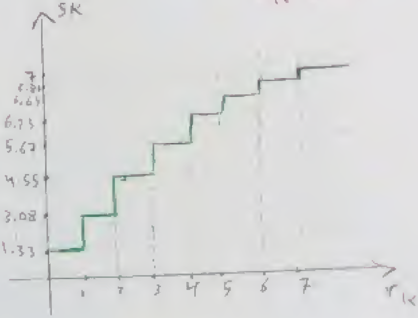
$$S_6 = S_5 + 7P_6(r_6) = 6.65 + 0.21 = 6.86$$

$$S_7 = S_6 + 7P_7(r_7) = 6.86 + 0.14 = 7$$

$$\boxed{7}$$

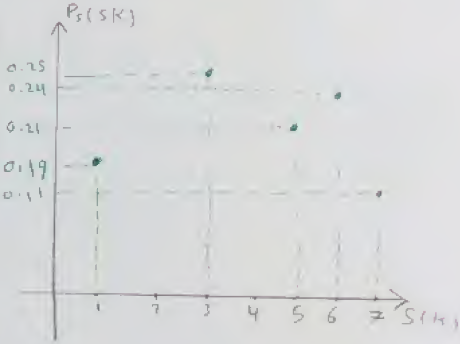
هجعل Rounding لقيم ال $S_k$ (يعني Quantization) و أرسم العلاقة بين $r_k$ و $S_k$

| S | Exact | Quantized |
|---|---|---|
| $S_0$ | 1.33 | 1 |
| $S_1$ | 3.08 | 3 |
| $S_2$ | 4.55 | 5 |
| $S_3$ | 5.67 | 6 |
| $S_4$ | 6.23 | 6 |
| $S_5$ | 6.65 | 7 |
| $S_6$ | 6.86 | 7 |
| $S_7$ | 7 | 7 |




باقي إني أحسب $P_s(S_k)$ وأرسم ال output Histogram

| $r_k$ | $n_k$ | $S_k$ | $P_s(S_k)$ |
|---|---|---|---|
| $r_0=0$ | 790 | $S_0=1$ | |
| $r_1=1$ | 1023 | $S_1=3$ | |
| $r_2=2$ | 850 | $S_2=5$ | |
| $r_3=3$ | 656 | $S_3=6$ | |
| $r_4=4$ | 329 | $S_4=6$ | |
| $r_5=5$ | 245 | $S_5=7$ | |
| $r_6=6$ | 122 | $S_6=7$ | |
| $r_7=7$ | 81 | $S_7=7$ | |




* عندي 5 قيم لل S هما (1, 3, 5, 6, 7) حيث $S_5=S_6=S_7$ و $S_3=S_4$
و مطلعش عندي مايتساوي 2 أو 4 (عادي جدا مفيش أي مشكلة)

* لاحظ إنه $r_5=5$ لما اتحولت بقت $S_5=7$ و $S_6=7$ و $S_7=7$
معنى كده إنه عدد البكسلز في S اللي ليهم القيمة 7 بقى $n_5+n_6+n_7$
ومع $r_3, r_4$ بعد ال mapping بقى عدد ال pixels بالقيمة 6 هو $n_3+n_4$

$P(S=1) = n_0/MN = 790/4096 = 0.19$

$P(S=3) = n_1/MN = 1023/4096 = 0.25$

$P(S=5) = n_2/MN = 850/4096 = 0.21$

$P(S=6) = (n_3+n_4)/MN = (656+329)/4096 = 0.24$

$P(S=7) = (n_5+n_6+n_7)/MN$ $\boxed{8}$ $= (245+122+81/4096 = 0.11$

* ال Histogram اللي طلع مضبوط إنه equalized (طبعا هو approximated)
* معنش قيم في الجدول بتاع ال S بتقول إنه ليها قيمة Quantized ب (2) أو (0) أو (4) ، عشان كده معنش بكسلز عندهم
* لما عملنا Mapping من $r_5$ اللي كان عندها 245 بكسل قيمتهم ب 6 ، لقينا ال $r_5$ بقت $s_5$ قيمتها ب 7 ، فبقى عندي 245 بكسل قيمتهم ب 7 بعد ال equalization ،
* نفس الكلام مع $r_6$ و $r_7$ ، لما اتعمل mapping بقت القيم 7
* ممكن نحسب ال $P_s(S)$ بطريقة تانية (لو ركزت في اللي فات هتفهمها)

$$P(s=1) = 790/4096 = P_0(r_0) = 0.19$$

حسبناها في أول جدول في المعطيات صفحة (6)

$$P(s=3) = 1023/4096 = P_1(r_1) = 0.25$$

ممكن بقى نختصر طالما حسبنا $P_r(r)$ قبل كده ونسرع الحساب

$$P(S=5) = P_2(r_2) = 0.21$$

$$P(S=6) = P_3(r_3) + P_4(r_4) = 0.16 + 0.8 = 0.24$$

$$P(S=7) = P_5(r_5) + P_6(r_6) + P_7(r_7) = 0.06 + 0.03 + 0.02$$

$$= 0.11$$

لازم مجموع ال $P_s$ يطلع ب 1

$$P(S=1) + P(S=3) + P(S=5) + P(S=6) + P(S=7)$$

$$= 0.19 + 0.25 + 0.21 + 0.24 + 0.11 = 1$$

* خلي بالك إنه $P_6(s_6)$ هي $P_6(r_6)$ و $P_7(s_7)$ هي $P_7(r_7)$ ، وهكذا

لكن $P(S=7) = P_5(s_5) + P_6(s_6) + P_7(s_7)$

$= P_5(r_5) + P_6(r_6) + P_7(r_7)$

دي حاجة بديهية بس حبيت أوضحها مش أكتر